S E S 2 0 1 9
Fifteenth International Scientific Conference
SPACE, ECOLOGY, SAFETY
6 – 8 November 2019, Sofia, Bulgaria

АНАЛИТИЧЕН ПОДХОД ЗА ИЗСЛЕДВАНЕ НА НЕЛИНЕЙНО МАХАЛО

Костадин Шейретски[1], Румен Шкевов[2], Николай Ерохин[3]

[1]Университет за национално и световно стопанство, София, България
[2]Институт за космически изследвания и технологии – Българска академия на науките
[3]Институт за космически изследвания – Руска академия на науките
e-mail: ksheiretsky@space.bas.bg, shkevov@space.bas.bg

Ключови думи: *Автономни диференциални уравнения, специални функции, осцилиращи системи, аналитични методи, нелинейна динамика*

Резюме: *Предложен е обобщен метод за изследване движението на нелинейно махало. Подходът дава възможност за кратко и ясно описание на класически резултати, но от един друг поглед на проблема. Получените аналитични изрази, описващи различни видове движение, получени чрез предложения метод напълно съответстват на вече известните решения, получени от други методи. Направени са заключения относно функционалността и предимствата на получените аналитични изрази чрез предложения метод.*

AN ANALYTICAL APPROACH FOR STUDY OF NONLINEAR PENDULUM

Kostadin Sheiretsky[1], Rumen Shkevov[2], Nikolay Erokhin[3]

[1]University of National and World Economy, Sofia, Bulgaria
[2]Space Research and Technology Institute – Bulgarian Academy of Sciences
[3]Space Research Institute – Russian Academy of Sciences
e-mail: ksheiretsky@space.bas.bg, shkevov@space.bas.bg

Keywords: *Autonomous differential equations, special functions, oscillating systems, analytical methods, nonlinear dynamics.*

Abstract: *A generalized method for investigating the motion of a nonlinear pendulum is proposed. The approach allows a brief and clear description of the classic results, but from another perspective of the problem. The analytically obtained expressions describing various types of motion received thru proposed method completely corresponds to the already known solutions received by other methods. Conclusions about the functionality and advantages of the analytical expressions obtained through the proposed method are drawn.*

Въведение

Едно от уравненията, допускащи точно решение в специални функции е уравнението на махалото [1]:

(1) $$\ddot{q}+\omega^2 \sin q = 0 ,$$

където q е ъгълът сключващ се между правата в посока на гравитационната сила, отчетена от точката на окачване и нишката за която е свързана тежестта на махалото.

Чрез подходящо преобразуване свеждаме уравнението до система от две диференциални уравнения от първи ред:

$$\dot{q} = p ,$$

(2) $$\dot{p} = -\omega^2 \sin q .$$

Ще въведем специално преобразувание [2, 3], което да приведе система (2) във възможно най- проста математическа форма. Задачата, която си поставяме е да направим изследване на фазовите траектории на системата, при различни режими на движение, от гледна точка на въведените нови променливи.

Преобразуване на системата, описваща махалото

Използваме преобразуванието:

(3) $$\tilde{\psi} = \omega \sin\frac{q}{2} + i\frac{p}{2},$$

(4) $$\tilde{\psi}^* = \omega \sin\frac{q}{2} - i\frac{p}{2}.$$

Диференцираме (3) и (4) по времето, като първите производни отбелязваме с точка. Достига се до уравненията:

(5) $$i\dot{\tilde{\psi}} = \omega \cos\frac{q}{2}\tilde{\psi},$$

(6) $$i\dot{\tilde{\psi}}^* = -\omega \cos\frac{q}{2}\tilde{\psi}^*.$$

Лесно се получава законът за запазване на енергията:

(7) $$|\tilde{\psi}|^2 \equiv \tilde{\psi}\tilde{\psi}^* = const = h.$$

Наистина:

$$i\frac{d}{dt}|\tilde{\psi}|^2 = \omega\cos\frac{q}{2}\left(\tilde{\psi}\tilde{\psi}^* - \tilde{\psi}^*\tilde{\psi}\right) = 0.$$

Като следствие от този закон, може да изведем математическия израз на закона за запазване на енергията, включващ координатата и импулса:

(8) $$\frac{p^2}{2} + \omega^2(1-\cos q) = 2h,$$

изразът следва непосредствено от пресмятане на произведението $\psi\psi^*$.

Нека:

$$\tilde{\psi}(0) = \tilde{\psi}_0,$$

$$\tilde{\psi}^*(0) = \tilde{\psi}_0^*,$$

Тогава решенията на двете диференциални уравнения (5) и (6) са съответно:

(9) $$\tilde{\psi} = \tilde{\psi}_0 \exp(-i\omega I),$$

(10) $$\tilde{\psi}^* = \tilde{\psi}_0^* \exp(i\omega I),$$

(11) $$I = \int_0^t \cos\frac{q}{2}dt.$$

От по-горните равенства се извежда математическата формула:

(12) $$\tilde{\psi}_0\tilde{\psi}_0^* = h.$$

Изследване на възможните режими за движение на махалото

Сепаратрисно решение

Нека: $h = \omega^2$. Тогава:

(13) $$\tilde{\psi}\tilde{\psi}^* = \frac{p^2}{4} + \omega^2 \sin^2 \frac{q}{2} = \frac{p^2}{4} + \omega^2 - \omega^2 \cos^2 \frac{q}{2} = \omega^2 ,$$

следователно:

(14) $$\omega \cos \frac{q}{2} = \pm \frac{p}{2} .$$

Да приемем за улеснение, че $q(0) = q_0$. Тогава лесно интегрираме и се получава:

(15) $$\ln tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{q}{4}\right) - \ln tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{q_0}{4}\right) = \mp \omega t .$$

Тогава се достига до израза:

(16) $$q = 4arctg\left[tg\left(\frac{\pi}{4} - \frac{q_0}{4}\right) e^{\mp \omega t} \right] - \pi .$$

Ако се интересуваме от конкретният вид на функцията ψ, лесно може да се съобрази, че:

(17) $$\omega I = \pm \int_0^t \frac{\dot{q}}{2} dt = \pm \frac{q}{2} .$$

Взема се под внимание, че:

(18) $$\frac{\tilde{\psi} + \tilde{\psi}^*}{2} = \frac{\tilde{\psi}_0 e^{\mp i \frac{q}{2}} + \tilde{\psi}_0^* e^{\pm i \frac{q}{2}}}{2} = \omega \sin \frac{q}{2} ,$$

(19) $$\tilde{\psi}_0 \tilde{\psi}_0^* = \omega^2 .$$

Тогава:

(20) $\tilde{\psi}_0 = -\frac{\omega}{i}$ и $\tilde{\psi}_0^* = \frac{\omega}{i}$ или $\tilde{\psi}_0 = \frac{\omega}{i}$ и $\tilde{\psi}_0^* = -\frac{\omega}{i}$.

В този случай се достига до решението:

(21) $$\tilde{\psi} = \pm i\omega \exp\left(\mp i \frac{q}{2}\right),$$

(22) $$\tilde{\psi}^* = \mp i\omega \exp\left(\pm i \frac{q}{2}\right).$$

Подготовка за изследване на системата в трептящ режим и режим на въртене

Отчита се фактът, че:

(23) $$\frac{\tilde{\psi}+\tilde{\psi}^*}{2}=\frac{\tilde{\psi}_0 e^{-i\omega I}+\tilde{\psi}_0^* e^{i\omega I}}{2}=\omega\sin\frac{q}{2}=\pm\omega\sqrt{1-\dot{I}^2}\ .$$

Тогава, ако положим:

(24) $$\tilde{\psi}_0=-\frac{\sqrt{h}}{i}\ \text{ и }\ \tilde{\psi}_0^*=\frac{\sqrt{h}}{i},$$

се достига до уравнението:

(25) $$\sqrt{h}\sin\omega I=\pm\omega\sqrt{1-\dot{I}^2}\ .$$

Това уравнение лесно се свежда до вид удобен за изследване:

(26) $$\dot{\varphi}=\pm\sqrt{h}\sqrt{k^2-\sin^2\varphi},\ \varphi=\omega I\ ,\ k^2=\frac{\omega^2}{h}.$$

Режим на трептене: $k^2<1$

Нека дефинираме определения интеграл [4]:

(35) $$u=\int_0^{\varphi}\frac{d\xi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\xi}}$$

амплитудата φ я определяме посредством равенството:

(36) $$\varphi=amu\,.$$

Функциите *елиптичен синус* и *елиптичен косинус* се определят съответно така:

(37) $$sn(u,k)=\sin(amu)\,,\ cn(u,k)=\cos(amu)$$

Дефинираме още една функция наречена *делта амплитуда:*

(38) $$dn(u,k)=\sqrt{1-k^2(\sin\xi)^2}\ .$$

Функциите елиптичен синус, елиптичен косинус и делта амплитуда се наричат функции на Якоби. Тези функции са свързани посредством равенствата:

(39) $$sn^2(u,k)+cn^2(u,k)=1,$$

(40) $$dn^2(u,k)+k^2\sin^2\xi=1.$$

В сила са и равенствата:

(41) $$\frac{d}{du}sn(u,k)=cn(u,k)dn(k,u),$$

(42) $$\frac{d}{du}cn(u,k)=-sn(u,k)dn(k,u),$$

(43) $$\frac{d}{du}dn(u,k)=-k^2sn(u,k)cn(k,u).$$

Важно значение в теория на елиптичните функции имат *пълните елиптични интеграли от първи род:* $K(k)$, *втори род:* $E(k)$, които съответно се дефинират с формулите (4, 5):

(44) $$K(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\xi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\xi}}$$

(45) $$E(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2(\sin\xi)^2}$$

Полагаме:

(46) $$\sin\varphi=k\sin x.$$

Тогава се достига до израза:

(47) $$\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}}=\pm\sqrt{h}(t-t_0).$$

Следователно:

(48) $$\sin x=sn\left[\pm\sqrt{h}(t-t_0)+F,k^2\right],\ \int_0^{x_0}\frac{dx}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}}=F.$$

Като краен резултат се получава:

(49) $$\sin\frac{q}{2}=sn\left[\pm\sqrt{h}(t-t_0)+F,k^2\right].$$

Режим на въртене: $k^2>1$.

Полагаме:

(50) $$k_1^{\ 2}=\frac{1}{k^2}.$$

Тогава по аналогичен начин се достига до:

(51) $$\int_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k_1^{\ 2}\sin^2\varphi}}=\pm\omega(t-t_0).$$

(52) $$\varphi=am\left[\pm\omega(t-t_0)+F_1,k_1^{\ 2}\right],\ \int_0^{\varphi_0}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k_1^{\ 2}\sin^2\varphi}}=F_1.$$

Следователно:

(53) $$\cos\frac{q}{2}=\frac{d}{d(\omega t)}am\left[\pm\omega(t-t_0)+F_1,k_1^{\ 2}\right].$$

Заключение

Използваното от нас преобразувание свежда системата уравнения (2), описваща махалото, до система (5) и (6), от която по най-елементарен начин се извежда закона за запазване на енергията. Този подход дава възможност за ясен физичен анализ на получените резултати. Методът изцяло се съгласува с резултатите, получени чрез традиционните средства [6, 7]. Използваният подход, може да се прилага към доста по-сложни модели на физични системи. Целта на настоящата публикация е да го представи за система (5) и (6), при която са известни решенията, за да се демонстрира неговата пригодност при решаване на такъв тип задачи, а по-нататък да се развие и методика за прилагането му при разрешаване на сложни математически модели.

Литература:

1. Арнольд, В. И, Математические методы классической механики. Москва, “Наука”, 1989.
2. Ландау Л., Е. Лифшиц. Теоретическая физика. Том 1. Механика. Москва, “Наука”, 1988.
3. Косевич, А., А. Ковалев. Введение в нелинейную физическую механику. Киев. “Наукова думка”, 1989.
4. Двайт, Г. Таблицы интегралов. Москва, “Наука”, 1973.
5. Моисеев Н. Н. Асимптотические методы нелинейной механики. Москва, “Наука”, 1969.
6. Малинецкий, Г. Г. Математические основы синергетики. Москва. УРСС, 2011.
7. Заславский Г. М., Р. З. Сагдеев. Введение в нелинейную физику: от маятника до турбулентности и хаоса. Москва, “Наука”, 1988.